Example Answers

International Master's Programs of Chemical Engineering in the Graduate School of Engineering, Kyushu University (Academic Year from October, 2025)

Subject：Mathematics（1/3 sheet）

1.

(1.1) $y'' - 2y' - 3y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$ より，$\lambda = -1, 3$
したがって一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

(1.2) $y'' + 4y = \cos(2x)$

特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ より，$\lambda = +2i$
したがって同次解は

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

右辺$\cos(2x)$も同次解に含まれているため
$y'' + 4y = \cos(2x)$　の特殊解を$\mathrm{Y}(x) = x(A\cos(2x) + B\sin(2x))$とおくと

$$\mathrm{Y}(x) = \frac{x}{4}\sin(2x)$$

したがって，非同次系の一般解は

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{x}{4}\sin(2x)$$

(1.3) $y''' - 3y'' + 4y = 0$
特性方程式 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ より，$\lambda = -1, 2$ (重解)
したがって，同次系の一般解は

$$\mathrm{y} = \mathrm{C}_1 e^{-x} + (\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 x)e^{2x}$$

(1.4) $y''' - 3y'' + 4y = 5x + 8e^{3x}$
同次系の一般解は(1. 2)の通りである．
ここで，
$y''' - 3y'' + 4y = 5x$　の特殊解$\mathrm{Y}(x)$は$\frac{5}{4}x$

$y''' - 3y'' + 4y = 8e^{3x}$　の特殊解を$\mathrm{Y}(x) = \mathrm{A}e^{\mathrm{B}x}$とおくと，

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AB}e^{\mathrm{B}x}$$
$$\mathrm{Y}''(x) = \mathrm{AB}^2 e^{\mathrm{B}x}$$
$$\mathrm{Y}'''(x) = \mathrm{AB}^3 e^{\mathrm{B}x}$$

$$\mathrm{Y}''' - 3\mathrm{Y}'' + 4\mathrm{Y} = (\mathrm{AB}^3 - 3\mathrm{AB}^2 + 4\mathrm{A})e^{\mathrm{B}x} = 8e^{3x}$$
より，$\mathrm{B} = 3$,　$\mathrm{A} = 2$
$$\mathrm{Y}(x) = 2e^{3x}$$

$$y = \frac{5}{4}x + 2e^{3x} + \mathrm{C}_1 e^{-x} + (\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 x)e^{2x}$$

Example Answers

International Master's Programs of Chemical Engineering in the Graduate School of Engineering, Kyushu University (Academic Year from October, 2025)

Subject：Mathematics（2/3 sheet）

2.

(2.1) Let A and B be the points where the tangent to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ intersects with the x-axis and y-axis, respectively. Find the minimum length of the line segment AB.

(2.2) Calculate the following equation. $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy$, $D: x^2+y^2 \leqq 1$

(1) 接点を $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とする．

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を x について微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

これより接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$$

よって接線は

$$y-b\sin\theta=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}(x-a\cos\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

したがって OA，OB は

$$OA=\frac{a}{\cos\theta}, \qquad OB=\frac{b}{\sin\theta}$$

よって AB は

$$AB^2=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}$$

この式を $f(\theta)$ とおくと

$$f(\theta)=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}$$

$$f'(\theta)=\frac{2a^2\sin\theta}{\cos^3\theta}-\frac{2b^2\cos\theta}{\sin^3\theta}=2a^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\tan^4\theta-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

図の対称性から第 1 象限についてのみ考え，このときの範囲は $0<\theta<\pi/2$ である．増減表は

θ	0	$\tan^{-1}\sqrt{b/a}$	$\pi/2$
$f'(\theta)$	−	0	＋
$f(\theta)$	↘	最小値	↗

よって，$\theta=\tan^{-1}\sqrt{b/a}$ のとき $f(\theta)$ は最小となる．このとき，$\tan^2\theta=\frac{b}{a}$ となるので,

$$\cos^2\theta=\frac{a}{a+b},\quad \sin^2\theta=\frac{b}{a+b}$$

Example Answers

International Master's Programs of Chemical Engineering in the Graduate School of Engineering, Kyushu University (Academic Year from October, 2025)

Subject：Mathematics（3/3 sheet）

これより

$$f(\theta)=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}=a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2$$

ゆえに線分 AB の最小値は$(a+b)$

(2)　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$とおくと$D:x^2+y^2\leqq 1$ より $0\leqq r\leqq 1$，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$となる．よって

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr\int_0^{2\pi}d\theta$$

ここで、$r^2=t$とおくと，$2rdr=dt$，$0\leqq t\leqq 1$ より

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{1}{2}dt\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta\right]_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt=\pi\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\pi\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt$$

$$=\pi\left[\sin^{-1}t+\sqrt{1-t^2}\right]_0^1=\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$