

科目 数学（1枚）

問題1 [18点]

次の行列 $A, \mathbf{x}, \mathbf{b}$ について以下の問いに答えよ。ここで a は実数とする。

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 7 \\ -1 & 0 & -8a & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (1.1) A の逆行列が存在しない場合の a の値はいくらか。
 (1.2) $a = 1$ のとき、 A の行列式はいくらか。
 (1.3) $a = 0$ のとき、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす \mathbf{x} を求めよ。

問題2 [16点]

以下の問いに答えよ。

- (2.1) $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ ($0 \leq x \leq 2$) の曲線の長さを求めよ。
 (2.2) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。
 (2.3) 円柱 $x^2 + y^2 \leq 4$ の $0 \leq z \leq x$ の部分の図形の体積を求めよ。

問題3 [16点]

以下の問いに答えよ。

- (3.1) 次の線形微分方程式の一般解を求めよ。

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

- (3.2) 次の非斉次の線形微分方程式の一般解を求めよ。

$$y'' + 4y' - 5y = 5x^2 + e^x$$

- (3.3) $y'' + 4y = 0$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ (ただし $a < b$) が任意の α と β に対して一意解をもつための a と b に関する条件を示せ。