

科目 数学 (1枚)

問題1 [16点]

曲線 $C: 4(x-1) = y^2$, $(-2 < y < 2)$ の接線 l に原点 O からおろした垂線との交点を H とする.

(1.1) H を $(r \cos \theta, r \sin \theta)$, $(-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4})$ と表したとき, r を θ で表せ.

(1.2) H が描く曲線に O をつけ加えた曲線が囲む図形の面積 S を求めよ.

問題2 [16点]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(2.1) $y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}$

(2.2) $y'' + 9y = \cos 3x$

(2.3) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$

問題3 [18点]

(3.1) 3つのベクトル $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 3, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 1)$ から次のような手順で正規直交基底を作る. (i) $\mathbf{v}_1$ を正規化したベクトルを $\mathbf{q}_1$ とする. (ii) $\mathbf{v}_2, \mathbf{q}_1$ の一次結合により $\mathbf{q}_1$ と直交するベクトルを構成して, 正規化したものを $\mathbf{q}_2$ とする. (iii) $\mathbf{v}_3, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ の一次結合により $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ それぞれと直交するベクトルを構成して, 正規化したものを $\mathbf{q}_3$ とする. $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ を求めよ.

(3.2) 行列 $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1^t, \mathbf{v}_2^t, \mathbf{v}_3^t)$, 行列 $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1^t, \mathbf{q}_2^t, \mathbf{q}_3^t)$ とおく. $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ となるような行列 $\mathbf{R}$ を求めよ. ここで $(\cdot)^t$ は行列転置を表す.

(3.3) 行列 $\mathbf{A}$ の行列式を求めよ.